

0.1 Homotopy push out

ここでは push out の話に限って行うため $D = \{a \longleftarrow b \longrightarrow c\}$ とおいておく。

Remmark 0.1.1

model 圏 C において、 $X \in C^D$ は $X(a) \longleftarrow X(b) \longrightarrow X(c)$ の図式の事である。また $f \in \text{Hom}_{C^D}(X, Y)$ は natural transformation であり、

$$\begin{array}{ccccc} X(a) & \longleftarrow & X(b) & \longrightarrow & X(c) \\ f_a \downarrow & & f_b \downarrow & & f_c \downarrow \\ Y(a) & \longleftarrow & Y(b) & \longrightarrow & Y(c) \end{array}$$

を可換にする morphism の組 (f_a, f_b, f_c) であり、 $\partial_a(f), \partial_c(f)$ を、

$$\begin{array}{ccc} X(a) & \longleftarrow & X(b) \\ \downarrow & & \downarrow f_b \\ \partial_a(f) & \longleftarrow & Y(b) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X(b) & \longrightarrow & X(c) \\ f_b \downarrow & & \downarrow \\ Y(b) & \longrightarrow & \partial_c(f) \end{array}$$

で与えられる push out とする。このとき、push out の性質から、

$$i_a(f) : \partial_a(f) \longrightarrow Y(a), \quad i_c(f) : \partial_c(f) \longrightarrow Y(c)$$

が導かれる。ついでに $i_b(f) = f_b : X(b) \longrightarrow Y(b)$ とおいておく。

MC1 により、この図式の push out が存在する。push out を対応させることは、

$$\text{colim} : C^D \longrightarrow C$$

を考える事である。今までの話で Derived fanctor を考えたいのなら C^D も model 圏でありたい。

Proposition 0.1.2

model 圏 C において、 $f \in \text{Hom}_{C^D}(X, Y)$ において、

1. f が weak equivalence であるとは f_a, f_b, f_c がすべて weak equivalence とする。

2. f が fibration であるとは f_a, f_b, f_c がすべて fibration とする。
3. f が cofibration であるとは $i_a(f), i_b(f), i_c(f)$ がすべて cofibration とする。

と定義すればこれにより C^D は model 圏である。

proof) cofibration だけ少し勝手が違うがすべて C の morphism $\times 3$ で考えれば良い。MC1,2,3 は面倒だが確かめてみればいい。MC4 を確かめる。

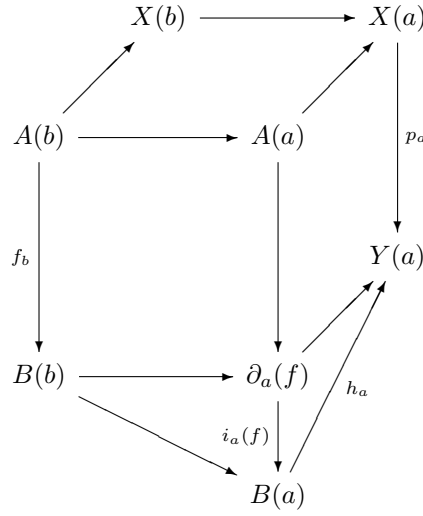
$$\begin{array}{ccc}
 (A(a) \longleftarrow A(b) \longrightarrow A(c)) & \longrightarrow & (X(a) \longleftarrow X(b) \longrightarrow X(c)) \\
 \downarrow f & & \downarrow p \\
 (B(a) \longleftarrow B(b) \longrightarrow B(c)) & \longrightarrow & (Y(a) \longleftarrow Y(b) \longrightarrow Y(c))
 \end{array}$$

の可換図式で f を cofibration、 p を acyclic fibration とする。つまり、次の3つの可換図を考えればよい。

$$\begin{array}{ccccc}
 A(a) & \longrightarrow & X(a) & & A(b) & \longrightarrow & X(b) & & A(c) & \longrightarrow & X(c) \\
 f_a \downarrow & & \downarrow p_a & & f_b \downarrow & & \downarrow p_b & & f_c \downarrow & & \downarrow p_c \\
 B(a) & \xrightarrow{g_a} & Y(a) & & B(b) & \xrightarrow{g_b} & Y(b) & & B(c) & \xrightarrow{g_c} & Y(c)
 \end{array}$$

ここで仮定より、 p_a, p_b, p_c はすべて acyclic fibration で、 f_b だけは cofibration である。よって、中央の図式に限っては lift が存在する。これを $h_b : B(b) \longrightarrow X(b)$ とす

る。また、



の図式において、push out の性質から f_b が cofibration なら、 $A(a) \rightarrow \partial_a(f)$ も cofibration となる。よって p_a が acyclic fibration なので、右の図式に lift が存在する。これを、 $u : \partial_a(f) \rightarrow X_a$ が存在する。このときさらに、

$$\begin{array}{ccc}
 \partial_a(f) & \xrightarrow{u} & X_a \\
 i_a(f) \downarrow & & \downarrow p_a \\
 B(a) & \longrightarrow & Y(a)
 \end{array}$$

の図式にも lift が存在するので、 $g_a : B(a) \rightarrow X(a)$ とおく。同様の構成で、 $g_c : B(c) \rightarrow X(c)$ が定義できる。

$$g = (g_a, g_b, g_c) : B \rightarrow X$$

が確かに natural であるのは、上の立方体の可換図式を考えればわかる。また、MC4 のもうひとつも同じく証明できる。

最後に MC5 である。 $f : A \longrightarrow B$ を C^D の morphism とする。つまり、

$$\begin{array}{ccccc} A(a) & \longleftarrow & A(b) & \longrightarrow & A(c) \\ f_a \downarrow & & f_b \downarrow & & f_c \downarrow \\ B(a) & \longleftarrow & B(b) & \longrightarrow & B(c) \end{array}$$

このとき、単純に f_a, f_b, f_c の3つを C における factorization で分解すればいい訳ではない。ただし、 f_b の分解はそのまま用いる。つまり、

$$f_b : A(b) \xrightarrow{\sim} X \rightarrow B(b)$$

の分解がある。このとき、

$$A(a) \longleftarrow A(b) \longrightarrow X, \quad X \longleftarrow A(b) \longrightarrow A(c)$$

の push out をそれぞれ Y, Z とおくと、

$$\begin{array}{ccccc} A(a) & \longleftarrow & A(b) & \longrightarrow & A(c) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ Y & \longleftarrow & X & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B(a) & \longleftarrow & B(b) & \longrightarrow & B(c) \end{array}$$

の図式は可換で、上縦列はすべて acyclic cofibration である。ここで、 $Y \longrightarrow B(a)$, $Z \longrightarrow B(c)$ を factorization で分解すれば、上の図式は、

$$\begin{array}{ccccc}
 A(a) & \longleftarrow & A(b) & \longrightarrow & A(c) \\
 \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
 Y & \longleftarrow & X & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow \sim & & \downarrow = & & \downarrow \sim \\
 Y' & \longleftarrow & X & \longrightarrow & Z' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B(a) & \longleftarrow & B(b) & \longrightarrow & B(c)
 \end{array}$$

となり、右下から 2 段目の横列の morphism は MC4 より導かれて図式を可換する。このとき、 $f : A \longrightarrow (Y' \longleftarrow X \longrightarrow Z') \longrightarrow B$ が求める分解である。なぜなら、前が weak equivalence で後ろが fibration であることは見ればわかる。残るは前が cofibration かどうかであるが、push out から誘導される morphism の一意性により、 $Y \longrightarrow Y'$, $Z \longrightarrow Z'$ がそれぞれ cofibration なので成り立つ。MC5 のもう一つも同様である。

□

Example 0.1.3

位相圏を Strom の構成におけるモデル圏とする。

$$\text{colim} : \text{TOP}^D \longrightarrow \text{TOP}$$

を考えたとき、 $X, Y \in \text{TOP}^D$ を

$$X(b) = S^{n-1}, X(a) = X(c) = D^n, S^{n-1} \hookrightarrow D^n$$

で、 $Y(b) = S^{n-1}, Y(a) = Y(c) = *$ とする。また、 $f : X \longrightarrow Y$ を、

$$\begin{array}{ccccc}
 D^n & \xleftarrow{\quad} & S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & D^n \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow = & & \downarrow \simeq \\
 * & \xleftarrow{\quad} & S^{n-1} & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

とする。このとき、TOP の weak equivalence は homotopy equivalence で指定されているので、この $f : X \rightarrow Y$ は weak equivalence である。ただし、このとき、 $\text{colim} X \cong S^n$, $\text{colim} Y = *$ なので、 $\text{colim}(f) : \text{colim} X \rightarrow \text{colim} Y$ は weak equivalence ではない。つまり、

$$\text{colim} : \text{TOP}^D \rightarrow \text{TOP}$$

は weak equivalence を保たない。

上の事実は Topology においてはかなり厄介である。

Proposition 0.1.4

C をモデル圏とする。

$$\text{colim} : C^D \rightarrow C$$

に対し、Total left derived functor が存在する。

proof) $\text{colim} : C^D \iff C : \Delta$ であった。このとき、constant functor の $\Delta : C \rightarrow C^D$ は、 $f : X \rightarrow Y$ を C の morphism とすると、これを Δ で移すと、

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{=} & X & \xrightarrow{=} & X \\ f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow \\ Y & \xleftarrow{=} & Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

よって Δ は weak equivalence と fibration を保つ。これにより、total derived functor が存在し、

$$\mathbf{Lcolim} : \text{Ho}(C^D) \iff \text{Ho}(C) : \mathbf{R}\Delta$$

を満たす。

Remmark 0.1.5

Example 0.1.3 で colim が weak equivalence を保たない理由は、 X は cofibrant ではあるが、 Y が cofibrant でないからである。

最後に関連的な話題として、以前 sequential colimit というものを考えた。 $D = \{1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow \dots\}$ としたときの位相圏の functor category である

TOP^D のことである。この sequential system の圏 TOP^D にも push out と同じように model 構造が組み込める。このとき、

$$\text{colim} : \text{TOP}^D \longrightarrow \text{TOP}$$

を sequential colimit と呼んだわけだが、これは homotopy を保たなかった。保つためには、

$$X(1) \longrightarrow X(2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow X(n) \longrightarrow \cdots, Y(1) \longrightarrow Y(2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y(n) \longrightarrow \cdots$$

の写像がすべて cofibration である条件が必要であった。つまりこれは X, Y が cofibrant であるということである。

位相圏だけでなく、あるいは sequential system だけでなく、一般の model 圏 C と小圏 D に対し、 C^D が model 圏になるかどうかは一つの疑問である。それに関して研究していた人がいたのだが名前を忘れてしまった。